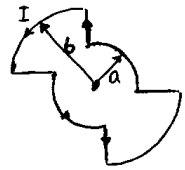
تمرین سری هجدهم الکترومغناطیس — قانون بیوساوار و آمپر

۱. در شکل روبرو میدان در نقطه مرکز دایره را بدست آورید؟



حل: ۴ قطعه افقی و عمودی میدان o را در مرکز تولید می‌کنند.

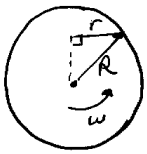
$$\Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 I}{4a} + \frac{\mu_0 I}{4b}$$

ناشی از حلقه b البته نصف آن لازم است — ناشی از حلقه a که البته از شکل پیدا است که نصف آن لازم است

---

۲. کره‌ای به شعاع a و چگالی ρ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور z می‌چرخد میدان در مرکز کره را بدست آورید؟

حل:



$$\vec{J} = \rho V = \rho R \sin\theta\, \omega\, \hat{a}_\varphi$$

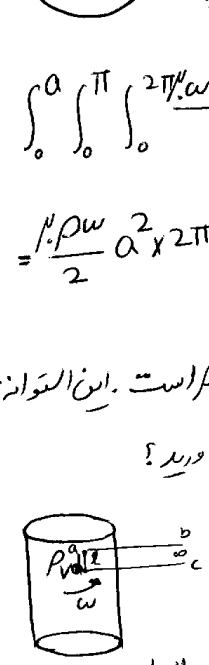
$$\Rightarrow B_0 = \int_v \frac{\mu_0 \vec{J} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} dv = \int \frac{\mu_0 (\rho r \sin\theta \omega)\hat{a}_\varphi \times (-a_R)}{4\pi R^2} R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dR$$

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \omega \rho R \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\, (-\hat{a}_\theta)}{4\pi} = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 \omega \rho R \sin^2\theta\, d\theta\, d\varphi\, (\hat{a}_z \sin\theta)}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} a^2 \times 2\pi \times \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \hat{a}_z \sin^3\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 a^2}{4} \times \rho\omega \times \frac{4}{3} \hat{a}_z = \frac{\mu_0 \rho a^2 \omega}{3} \hat{a}_z$$

---

۳. یک استوانه بسیار بلند به شعاع a دارای بار حجمی یکنواخت با چگالی ρ است. این استوانه حول محور z با سرعت زاویه ω را دایان بر ثانیه می‌چرخد میدان در $r = \frac{a}{2}$ را بدست آورید؟



حل: چگالی جریان مقدار برابر است با $\vec{J} = \rho V = \rho r \omega \hat{a}_\varphi$ حال قانون آمپر را با گرفتن مسیر آمپر مستطیل شکل که یک ضلع آن در $r = \frac{a}{2}$ و ضلع مقابل در ∞ است (مطابق شکل). چون جریان در جهت $\hat{a}_\varphi$ است میدان فقط مؤلفه H_z دارد که نسبت به z ثابت است. زیرا طول استوانه بسیار بزرگ است.

$$\oint_{abcd} B \cdot dl = \mu_0 I = \int_{a/2}^{a} \int_0^l \mu_0 J \cdot ds$$

$$\Rightarrow B_z l = \int_{a/2}^{a} \int_0^l \mu_0 \rho r \omega\, dr\, dz = \rho\omega \frac{\mu_0}{2}\left[a^2 - \frac{a^2}{4}\right] l \Rightarrow z = \rho\omega \frac{\mu_0}{2} \times \frac{3a^2}{4} = \frac{3\rho\omega a^2 \mu_0}{8}$$

۴. یک سیم پیچ مسطح شامل N دور مطابق شکل در صفحه xy قرار گرفته است شعاع داخلی سیم پیچ R_i و شعاع خارجی آن R_o می باشد میدان مغناطیسی در مرکز حلقه ها را بدست آورید. (فرض کنید جریان سیم پیچ I می باشد)

حل: اگر حلقه ای به ضخامت dR و شعاع R در مرکز O انتخاب کنیم تعداد سیم پیچ ها در ضخامت dR برابر است با $\frac{N dR}{R_o - R_i}$ بنابراین جریان موجود در این ضخامت برابر است با $\frac{N dR}{R_o - R_i} I$ حال میدان در مرکز این حلقه به شعاع R برابر است با:

$$dB = \frac{\mu_0 \left(\frac{N dR}{R_o - R_i} I\right)}{2R}$$

$$\Rightarrow B = \int_{R_i}^{R_o} dB = \frac{\mu_0 N I}{2(R_o - R_i)} \ln \frac{R_o}{R_i}$$

۵. یک پوسته استوانه ای به شعاع داخلی a و شعاع خارجی 2a دارای جریان با چگالی $J = J_0 \frac{\hat{a}_z}{a}$ می باشد. سیمی حامل جریان I در محور این پوسته قرار داده می شود جریان I چقدر باشد تا میدان در r>2a صفر باشد؟

حل:

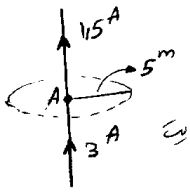
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \int_a^{2a} \int_0^{2\pi} \mu_0 J_0 \frac{r}{a} r\, dr\, d\varphi \Rightarrow$$

اگر H بخواهد صفر شود باید

$$I = -\int_a^{2a} \int_0^{2\pi} \mu_0 J_0 \frac{r^2}{a} dr\, d\varphi$$

$$\Rightarrow I = -\mu_0 J_0 \frac{2\pi}{a} \times \frac{1}{3} \left[(2a)^3 - a^3\right] \mu_0 = -\frac{J_0 14 \pi a^2}{3} \mu_0 \Rightarrow I = \frac{-14 J_0 \pi a^2}{3} \mu_0$$

۶. روی سیم بی نهایت بلندی نقطه ای مثل A با قابلیت ذخیره سازی بار الکتریکی مفروض است به طوری که جریان 3^A به آن وارد و جریان 1.5^A از آن خارج می شود. مقدار $\oint B.dl$ را روی مسیر بسته دایره ای شکل به مرکز A و شعاع 5^m واقع در صفحه عمود بر سیم چقدر است؟



حل: میدان در روی دایره به شعاع R ناشی از ۲ جریان I_1 و I_2 است که برابر است با:

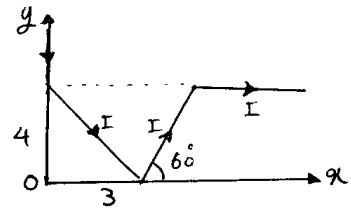
سیم بی نهایت

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I_2}{4\pi R} = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{4\pi R}$$

سیم بی نهایت

$$\Rightarrow \oint B.dl = B\, 2\pi R = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2)}{2} = 2.25 \mu_0$$

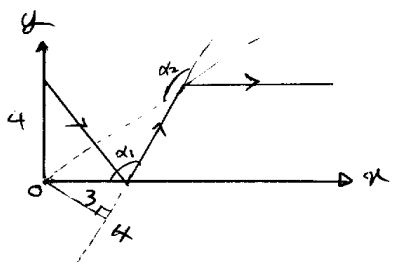
۷. در شکل روبرو میدان را در نقطه O بدست آورید؟



حل: میدان ناشی از قطعه سیم واقع روی محور y در نقطه O صفر است زیرا O در امتداد این قطعه سیم است. قطعه سیم و ترمثلث میدانی که ایجاد می‌کند از رابطه $B=\frac{I\mu_0}{4\pi r}[\cos\alpha_1-\cos\alpha_2]\hat{a}_\varphi$ بدست می‌آید.

$$\Rightarrow B_{\text{وتر}}=\frac{\mu_0 I}{4\pi(\frac{12}{5})}\left[\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right]=\frac{7I\mu_0}{48\pi}\rightarrow \text{وتر}=-\frac{7I\mu_0}{48\pi}\hat{a}_z$$

میدان سیمی که با محور x زاویه 60° می‌سازد با محاسبه α_1 و α_2 و فاصله عمودی O تا این سیم به صورت زیر بدست می‌آید:



$\alpha_1=120^\circ$

$OH=3\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha_2=157^\circ$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_0 I\,\hat{a}_z}{4\pi\,3\frac{\sqrt{3}}{2}}[\cos 120-\cos 157]$$

برای سیم افقی داریم:

$\alpha_1=143$

$\alpha_2=\pi$

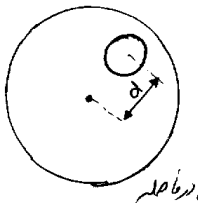
$OH=4$

$$\Rightarrow B=\frac{I\mu_0}{4\pi(4)}[\cos 143-\cos\pi]\hat{a}_z=0/05\frac{I}{4\pi}\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow B=-\frac{7I\mu_0}{48\pi}+\frac{0/16\,I\mu_0}{4\pi}+\frac{0/05\,I\mu_0}{4\pi}=-0/09\frac{I\mu_0}{\pi}$$

---

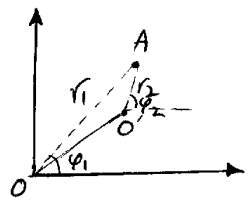
۸. یک استوانه بسیار طویل به شعاع a که محور آن بر محور z منطبق است حامل جریان با چگالی $J=J_0\hat{a}_z$ مفروض است. حفره‌ای استوانه‌ای به شعاع b به موازات محور آن استوانه و به فاصله d از محور استوانه ایجاد می‌کنیم به طوری که محور آن از خط $\varphi=\frac{\pi}{4}$ مطابق شکل می‌گذرد. میدان مغناطیسی در داخل این حفره را بدست آورید.



حل: مسئله را می‌توان با استفاده از جمع آثار حل کرد یعنی ابتدا میدان ناشی از استوانه با چگالی J_0 را بدست آورده و با میدان ناشی از چگالی $-J_0$ در حفره جمع کنیم. هر کدام از این میدان‌ها را می‌توان با استفاده از قانون آمپر بدست آورد. میدان در فاصله r از محور استوانه‌ای به چگالی J_0 برابر است با:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l}=I \Rightarrow B\cdot 2\pi r=J_0\pi r^2 \Rightarrow B=\frac{J_0}{2}r\hat{a}_\varphi$$

بنابراین اگر فاصله نقطه داخل حفره از محور استوانه r_1 و از محور حفره r_2 باشد داریم:



$$B = \frac{\mu J_0 r_1}{2}\hat{a}_{\varphi_1} - \frac{\mu J_0 r_2}{2}\hat{a}_{\varphi_2}$$

که میدان داخل حفره است (در نقطه A)

$$B = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{a}_x\left[a_x(-r_1)\sin\varphi_1 + r_1\hat{a}_y\cos\varphi_1 + r_2\hat{a}_x\sin\varphi_2 - r_2\hat{a}_y\cos\varphi_2\right]$$

که φ_1 زاویه OA با محور x و φ_2 زاویه O'A با محور x می‌باشد.

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{a}_x\left[\hat{a}_x(r_2\sin\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1) + \hat{a}_y(r_1\cos\varphi_1 - r_2\cos\varphi_2)\right]$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left[-d\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_x + d\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{a}_y\right] = \frac{\mu_0 J_0\sqrt{2}\,d}{4}(\hat{a}_y - \hat{a}_x)$$

۹. نیم‌کره‌ای به شعاع a حامل جریان سطحی به چگالی $\vec{J}_s = J_{s0}\cos\theta\,\hat{a}_\varphi$ می‌باشد. میدان مغناطیسی در مرکز کره را بدست آورید.

حل: از میدان ناشی از یک حلقه روی محور حلقه استفاده می‌کنیم.

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2(r^2+z^2)^{3/2}}\hat{a}_z = \mu_0\frac{j_s\,a\,d\theta\,(a\sin\theta)^2}{2(a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta)^{3/2}}\hat{a}_z = \mu_0\frac{J_{s0}\cos\theta\sin^2\theta}{2}\hat{a}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \int_0^{\pi/2} dB = \int_0^{\pi/2}\mu_0\frac{J_{s0}\cos\theta\sin^2\theta}{2}\hat{a}_z\,d\theta = \left\{-\frac{J_{s0}}{6}\cos^3\theta\,\hat{a}_z\right\}\mu_0 = \left(\frac{J_{s0}}{6}\hat{a}_z\right)\mu_0 = \frac{\mu_0 J_{s0}}{6}\hat{a}_z$$

۱۰. یک نوار دایروی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بار الکتریکی سطحی با چگالی غیریکنواخت $\rho_s = 2r$ می‌باشد. اگر این نوار با سرعت زاویه‌ای ω حول محورش بچرخد میدان مغناطیسی در مرکز نوار چقدر است؟

$$dI = \rho_s\,2\pi r\,dr\,\frac{\omega}{2\pi} = 2r(2\pi r\,dr)\frac{\omega}{2\pi} = 2r^2 dr\,\omega$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} \longrightarrow$$ میدان ناشی از یک حلقه در مرکز آن $\Rightarrow dB = r\omega\,dr$

$$B = \int_a^b dB = \int_a^b \mu_0 r\omega\,dr = \mu_0\frac{1}{2}\omega(b^2-a^2)$$